

2e deeltentamen wiskunde NW&I

vrijdag 3 november 2006, 14.00-17.00.

- Schrijf op ieder vel uw naam en studentnummer.
- Schrijf op het eerste vel de naam van uw werkcollegebegeleider (Thijs Ruijgrok, Sander Dahmen, Rogier Swierstra, Maarten van Pruijssen of Chris Eveleens)
- Geef een toelichting bij uw antwoorden.
- Teken faseplaatjes ZORGVULDIG en GROOT op het bijgeleverde ruitjespapier. Gebruik geodriehoek of lineaal voor rechte lijnen. Geen doorhalingen! De netheid van de plaatjes wordt ook beoordeeld.

Opgave 1

Bepaal bij elk van de volgende lineaire vergelijkingen

- de eigenwaarden
- de bijbehorende eigenvectoren, in geval van reële eigenwaarden.
- de stabiliteit en de aard van het vaste punt (zadel, knoop of spiraal)
- de algemene oplossing, in het geval van reële eigenwaarden.
- Teken het bijbehorende faseplaatje. In het geval van complexe eigenwaarden, schets in het faseplaatje ook de nul-cienen.

a)

$$x = -5x - 3y$$

$$y = 2x$$

b)

$$x = 3x - y \quad y = -x + 2y$$

c)

$$x = -5x + 17y \quad y = -2x + y$$

Opgave 2

Het onderstaande stelsel van vergelijkingen beschrijft een samenleving van diersoorten

$$\dot{x} = x(7 - x - 2y)$$

$$\dot{y} = y(5 - x - y).$$

a) Verklaar aan de hand van de vergelijking of dit een model is voor concurrentie of voor een roofdier-prooidier samenleving. Betrek in je antwoord de aanwezigheid van x op de groei van y en vice-versa. b) Bepaal de vaste punten van de vergelijking. Bereken de afgeleide-matrix $DF(x, y)$. Bereken voor elk vast punt de bijbehorende eigenwaarden en eventueel eigenvectoren. Teken voor elk vast punt een lokaal faseplaatje. c) Teken het totale faseplaatje van de vergelijking. Maak hierbij gebruik van de lokale faseplaatjes uit b) en van de nul-lijnen. d) Welke mogelijke uitkomst, of uitkomsten, kent dit model als $t \rightarrow \infty$? Is het mogelijk de einduitkomst te beïnvloeden door de beginwaarde van x of y te wijzigen?

Opgave 3

Het onderstaande stelsel van vergelijkingen beschrijft een samenleving van diersoorten

$$\dot{x} = x(8 - 2x - y)$$

$$\dot{y} = y^2 + x.$$

a) Verklaar aan de hand van de vergelijking of dit een model is voor concurrentie of voor een roofdier-prooidier samenleving. Betrek in je antwoord de aanwezigheid van x op de groei van y en vice-versa. b) Bepaal de vaste punten van de vergelijking. Bereken de afgeleide-matrix $DF(x, y)$. Bereken voor elk vast punt de bijbehorende eigenwaarden en eventueel eigenvectoren. Teken voor elk vast punt een lokaal faseplaatje. c) Teken het totale faseplaatje van de vergelijking. Maak hierbij gebruik van de lokale faseplaatjes uit b) en van de nul-lijnen. d) Welke mogelijke uitkomst, of uitkomsten, kent dit model als $t \rightarrow \infty$? Is het mogelijk de einduitkomst te beïnvloeden door de beginwaarde van x of y te wijzigen?